Számítástudomány alapjai

4. Általános gráfbejárás, BFS

# Általános gráfbejárás

A gráfbejárási algoritmus az inputgráf csúcsait és éleit fedezi fel.

**Input**: G = (V, E) (ir/ir.tatlan) gráf, (esetleg r ∈ V gyökér1).

Minden csúcs az eléretlen → elért → befejezett állapotokat veszi fel. A

bejárás akkor ér véget, amint minden csúcs befejezetté vált. A bejárás során

mindig az alábbi esetszétválasztás szerint bekövetkező esetnek megfelelően

történik a következő lépés.

**A bejárás menete:**

1. Van elért csúcs. Választunk egyet, mondjuk u-t.
   1. Ha van olyan uv él, amire v eléretlen, akkor v elértté válik (az uv él mentén).
   2. Ha nincs ilyen uv él, akkor u befejezetté válik.
2. Nincs elért csúcs.
   1. Ha van eléretlen u csúcs, akkor u-t elértté tesszük.
   2. Ha nincs eléretlen csúcs (azaz ∀ csúcs befejezett): END.

**Output:**

1. A csúcsok elérési és befejezési sorrendje.
2. Az élek osztályozása:
   1. uv faél: a v csúcs az uv él mentén vált a bejárás során.
   2. uv előreél: nem faél, de u-ból v-be faélekből irányított út vezet.
   3. uv visszaél: v-ből u-ba faélekből irányított út vezet
   4. keresztél: minden más él (u és v közt nincs leszármazási viszony).
   5. **Irányítatlan esetben az előreél és a visszaél ugyanazt jelenti.**
3. A bejárás fája: a faélek alkotta részgráf. (A bejárás fája valójában egy gyökereiből kifelé irányított erdő.)

**Terminológia**: Ha a bejárás fájában u-ból v-be irányított út vezet, akkor u a v **őse** és v az u **leszármazottja**. A faél és az előreél tehát ősből leszármazottba, a visszaél pedig leszármazottból ősbe vezet.

# BFS (Szélességi bejárás):

**Szélességi bejárás (BFS):** Olyan bejárás, ahol az 1. esetben mindig a legkorábban elért u csúcsot választjuk.

**BFS tulajdonságai:**

1. Ha i < j, akkor vi-t hamarabb fejezzük be, mint vj -t, továbbá vi gyerekei az elérési sorrendben megelőzik vj gyerekeit.
2. **Az elérési és befejezési sorrend megegyezik.**
3. **Gráfél nem ugorhat át faélt.**
4. Ha P a BFS-fa uv-útja, akkor P legrövidebb uv-út G-ben is.
   1. Ha P ′ egy G-beli uv-út, akkor P ′ egyetlen éle sem ugorhat át P -beliélt. Ezért P ′ utolsó éle nem kezdődhet korábban P utolsó élénél. Hasonlóigaz P ′ utolsó előtti, stb éleire. Így v-ből nem lehet u-ba visszajutni Pélszámánál kevesebb élen.
5. **A BFS-fa egy legrövidebb utak fája**
6. Minden él legfeljebb egy szintet lép lefelé a BFS-fában, így **nincs előreél**. (Irányítatlan esetben **csak** faél és keresztél van.)
   1. Ellentmod (5)-nek

# Legrövidebb utak:

**Def**: Adott G (ir) gráf és *l* : E(G) → R hosszfüggvény esetén egy P út hossza a P éleinek összhossza.

**Def:** Az u és v csúcsok távolsága a legrövidebb uv-út hossza.

**Def:** Az *l* hosszfüggvény nemnegatív, ha *l*(e) ≥ 0 teljesül minden e élre.

**Megf**: Ha *l*(e) = 1 a G minden e élére, akkor l˜(P ) a P élszáma. Ezért

a BFS-fa minden gyökérből elérhető csúcsba tartalmaz egy legrövidebb utat

a gyökérből, azaz a szélességi bejárás tekinthető egy legrövidebb utat kereső

algoritmusnak is.